Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т.А. ДЕНИСЕНКО, Л.Н. МАРЧЕНКО,
И.В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физического факультета

В семи частях

Часть пятая

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73
Д 332

Рецензенты:
Л.П.Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»
Д.П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко Т.А.
Д332 Математический анализ [текст]: [практическое пособие для студентов физического факультета. Ч. 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных] / Денисенко Т.А., Марченко Л.Н., Парукевич И.В.; Мин-во образов. РБ. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2006. – с.

В пятой части практического пособия «Математический анализ» излагаются краткие теоретические сведения по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий.
Практическое пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» является пятой частью комплекса пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физического факультета. Оно адресовано как для студентов, так и для преподавателей. Пособие написано в соответствии с действующей программой по данному курсу и представляет собой практическое пособие по математическому анализу с набором индивидуальных домашних заданий.

Материал каждого практического занятия разбит на пункты: основные теоретические сведения и формулы (без доказательств) необходимые для решения задач; вопросы, позволяющие проконтролировать усвоение основных понятий; типовые примеры, количество которых варьируется в зависимости от объема и важности темы; задания для аудиторной и домашней работ; наборы индивидуальных домашних заданий; список используемой литературы.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах» В.Ф. Бутузова, «Сборник индивидуальных заданий» А.П. Рябушко (1991). Поэтому многие задачи пособия не претендуют па оригинальность, хотя среди них есть целый ряд новых.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезным для преподавателей при проведении практических занятий, и студентам в их самостоятельной работе над предметом. Они с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Практическое занятие 1
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня.
2. Определение предела функции многих переменных.
3. Повторные пределы.
4. Непрерывность функции многих переменных.

Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного евклидова пространства.

Если правило f каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве G задана ***числовая функция*** (или ***отображение***) f ***от*** n ***переменных***. Множество G называется ***областью определения***, $D(f) = G$, а множество $E = \{u \in \boldsymbol{R} |\ u = f(x), x \in G\}$ – ***множеством значений функции*** f.

Обозначается: $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$; $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Частное значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ обозначается $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $z\big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или $z\big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \left\{(x; y; z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle|\ z = f(x, y)\right\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции нескольких переменных могут быть заданы явно (уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной: $z = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$, $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$) либо неявно (уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной).

Множество точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, называется ***множеством уровня*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим данному значению c.

Если $n = 2$, то множество уровня называется ***линией уровня***, если $n = 3$, то множество уровня называется ***поверхностью уровня***, если $n > 3$, то множество уровня называется ***гиперповерхностью уровня***.

Пусть функция $z = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, определена в окрестности $U(\varepsilon, x_0)$.

Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$,

$m = \overline{1,\infty}$, $x_m \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$, соответствующая последовательность $(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A.

Символическая запись: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m \in U(\varepsilon, x_0)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} f(x_m) = f(x_0)$.

Для записи предела функции можно использовать обозначение:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Как и в случае функции одной переменной, данное определение по Гейне предела функции двух переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела функции по Коши.

Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) : \forall M \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Если функция двух переменных $z = f(x; y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon; (x_0, y_0))$ и число A является пределом при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, то

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$$

называется ***двойным пределом***.

Отметим, что в некоторых приложениях удобно пользоваться определением по Коши, в других – по Гейне.

При определении предела функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ полагается, что функция может быть не определена в точке M_0. Поэтому значения функции $f(M)$ отличаются от числа z_0 на достаточно малую величину, если точка M выбрана достаточно близко к точке M_0. Из определения предела функции по Коши получаем $z_0 - \varepsilon < f(M) < z_0 + \varepsilon$. С **геометрической** точки зрения, приведенное неравенство означает, что точка графика функции $z = f(M) = f(x, y)$ из окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta, M_0)$ находится между двумя плоскостями $z = z_0 - \varepsilon$ и $z = z_0 + \varepsilon$. Другими словами, предел функции $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $M_0(x_0; y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Поскольку определение предела функций многих переменных аналогично определению предела функции одного переменного, то для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Повторные пределы. Для функции $z=f(x,y)$ можно определить понятие предела по переменной x, полагая y постоянным, и можно определить предел по y, полагая x постоянным.

Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в прямоугольной окрестности $U(M_0,d_1,d_2)=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid |x-x_0|<d_1, |y-y_0|<d_2\}$ точки $M_0(x_0,y_0)$ за исключением, быть может, самой точки $M_0(x_0,y_0)$. И пусть для каждого фиксированного y, удовлетворяющего условию $0<|y-y_0|<d_2$, при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{фик}}} f(x;y)=g(y)$. И пусть при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует ***повторный предел*** b для функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначается: $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)=b$.

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $z=f(x,y)$ *определена в некоторой прямоугольной окрестности* $U(M_0,d_1,d_2)$ *точки* $M_0(x_0,y_0)$, *и имеет в этой точке двойной предел* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b$. *И пусть для любого фиксированного* x, $0<|x-x_0|<d_1$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x_{фик}}} f(x;y)=h(x)$ *и для любого фиксированного* y, $0<|y-y_0|<d_2$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{фик}}} f(x;y)=g(y)$. *Тогда повторные пределы* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ *существуют и равны*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y).$$

Непрерывность функции многих переменных. Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью предела.

Функция $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, называется ***непрерывной*** в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$, если выполнены следующие условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 одно из указанных трех условий не выполняется, то она является точкой разрыва функции $u=f(x)$.

Для функции $z=f(x,y)$ двух независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва. Для функции $u=f(x,y,z)$ трех независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). *Пусть функции* $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0 = \left(t_1^0; t_2^0; ...; t_n^0\right) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0 = (\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0); ...; \varphi_n(t_0)) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t) = f(\varphi_1(t); \varphi_2(t); ...; \varphi_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что называется функцией в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Что такое множество уровня?

2.Сформулируйте определения предела функции $z = f(x, y)$ в точке по Гейне и по Коши. Что означает эквивалентность этих определений?

3. Дайте определение бесконечно малой функции в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ при $M \to M_0$.

4. Сформулируйте определение повторного предела функции $z = f(x, y)$. Дайте определение повторного предела для функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

5. Сформулируйте определение непрерывной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$. Какими свойствами обладают непрерывные функции?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1.Найти область определения следующих функций:

1) $z = x^2 + y^2$, 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$,

3) $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}$. 4) $z = \ln\left(5 - x^2 - y^2 - z^2\right)$.

Решение. 1. Область определения этой функции $D(f) = \boldsymbol{R}^2$, множество значений $E(f) = [0; +\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является круговой параболоид (рис.1).

2. Областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, т.е. $4 - x^2 - 2y^2 \geq 0$. Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ (на рис.2), т.е.

$$D(f) = \left\{ M(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}.$$

Множество значений $E(f) = [0; 2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида.

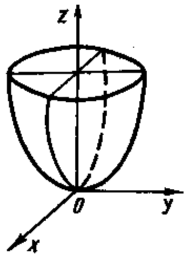

Рис.1.

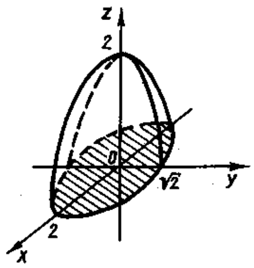

Рис.2.

3. Функция определена, если $1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2 \ge 0$ или $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \le 1$. Отсюда

$$D(f)=\left\{ M(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in \boldsymbol{R}^n \middle| x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \le 1 \right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r=1$ с центром в начале координат, а $E(f)=[0;1]$;

4. Функция определена, если $5-x^2-y^2-z^2>0$ или $x^2-y^2-z^2<5$, откуда

$$D(f)=\left\{ M(x;y;z)\in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x^2+y^2+z^2<5 \right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$, а $E(f)=(-\infty;\ln 5]$.

2. Вычислить, используя определение предела по Гейне, предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$.

Решение. Область определения данной функции $D(f)=\left\{(x;y)\in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x\ne y \ \right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k)_{k=1}^{\infty}=((x_k;y_k))_{k=1}^{\infty}$, таких, что $x_k\ne y_k$, $x_k\to 0$, $y_k\to 0$. Тогда

$$f(M_k)=\frac{x_k^3-y_k^3}{x_k-y_k}=x_k^2+x_k y_k+y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x-y}=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \left(\substack{x_k\to 0\\ y_k\to 0}\right)}} \left(x_k^2+x_k y_k+x_k^2\right)=0\cdot$$

3. Доказать, пользуясь определением предела по Коши, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x-y}=0\cdot$$

Решение. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M(x;y)\in \overset{\circ}{U}(\delta;(0;0))$ выполняется неравенство $|f(x,y)-0|<\varepsilon$. Так как для любой точки $M(x;y)\in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

то

$$|f(x,y)-0|=\left|x^2+xy+y^2\right|\le x^2+y^2+|xy|.$$

Оценим $|x\cdot y|$:

$$(|x|-|y|)^2=x^2-2xy+y^2\le x^2+y^2\ge 0 \ \Rightarrow\ |x\cdot y|\le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Таким образом, $|f(x,y)-0| \le \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2(O,M)<\varepsilon$. Отсюда $\rho(O,M)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$.
где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ мы нашли число $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M(x;y)\in U(\delta,M_0)$ будет выполняться неравенство
$\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$.

4. Найти точки разрыва функций:

1) $z=\frac{1}{(x-4)^2+y^2}$; 2) $z=\frac{1}{x-y}$; 3) $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$.

Решение. 1. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции.

2. Данная функция определена для любых x, y, таких, что $x\ne y$. Следовательно, прямая $x=y$ является линией разрыва функции.

3. Функция $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2+y^2+z^2\ne 9$. Сфера с центром в начале координат и радиусом 3 является поверхностью разрыва функции.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти области определения следующих функций

1) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$, 2) $z=\frac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, 3) $z=\sqrt{9-\left(x^2+y\right)^2}$,

4) $z=y\sqrt{\cos x}$, 5) $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$, 6) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-25}$,

7) $u=\arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

2. Дана функция $f(x;y)=\frac{2x-3y}{3x-2y}$. Найти $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

3. Выяснить, имеет ли функция $f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ предел при $x\to 0$, $y\to 0$.

4. Вычислить переделы

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^2y^3}{xy+2}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\frac{(x-2)^2-(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}$.

5. Показать, что для функции

$$f(x;y)=(2x+3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y),\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y),$$

но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)=0$.

6. Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^2-x+2y}{x+y}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=-1,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=2,$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует

7. Имеет ли предел функция $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ при $x\to\infty$, $y\to\infty$?

8. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$, 2) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$,

3) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$, 4) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$,

5) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти области определения следующих функций

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, 2) $z=\dfrac{2x+3y-4}{x+4y}$,

3) $z=\ln(-x-y)$, 4) $z=y\sqrt{\sin x}$,

5) $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$, 6) $u=\ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$,

7) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x}$.

2. Дана функция $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Найти $f(-3;4)$, $f\left(1;\dfrac{x}{y}\right)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

3. Вычислить переделы

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-y}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+4y^2}}{(x-1)^2+y^2}$.

4. Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=0,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=0$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует

5. Показать, что для функции

$$f(x;y)=xy\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=0,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=0,$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

6. Имеет ли предел функция $f(x;y)=\sin\ln\left(x^4+y^2\right)$ при $x\to 0$, $y\to 0$?

7. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$,

2) $f(x;y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$,

3) $f(x;y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2-y^2-1\right)}$,

4) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$,

5) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$,

6) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x+y)\left(y^2-x\right)}$.

Практическое занятие 2
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

1. Частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Частные производные.
3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Полным приращением функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных частные и полное приращения функции

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рис.1).

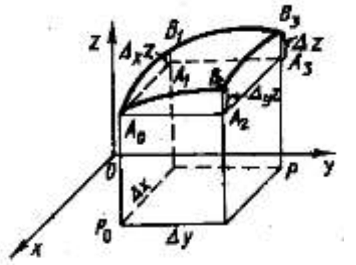

Рис.1.

Частной производной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f\ (x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Обозначается: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'_{x_1}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1}f\left(x_0\right)}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0;...;x_n^0\right)-f\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. Графиком функции $z=f(x,y)$ является некоторая поверхность Q. Возьмем точку $P_0(x_0;y_0)\in D(f)$. На этой поверхности ей соответствует точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y=y_0$. В сечении получим кривую $z=f(x;y_0)$ (на рис.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z=f(x;y_0)$ в плоскости $y=y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$ к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$ (см. рис.2).

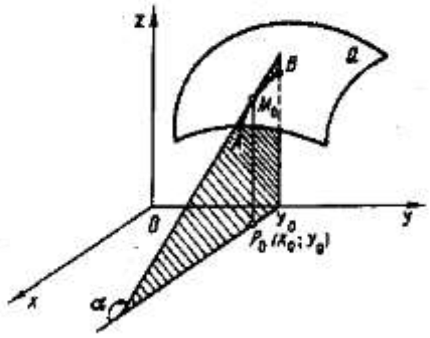

Рис.2.

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z=f(x,y)$ по y.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x),

$f'_y(x_0, y_0)$ – в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является некоторая поверхность Q (рис.3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

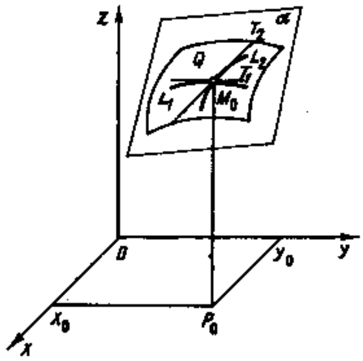

Рис.3.

Касательной плоскостью к поверхности Q в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Нормалью к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Замечание. Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется ***особой точкой поверхности***. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Дифференцируемость функции. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть $z = f(x, y)$ определена в окрестности $U(\delta; P_0)$ точки $P_0(x_0; y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (1)$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Данное равенство выражает *условие дифференцируемости* функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Функция $z=f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется ***дифференцируемой на*** G.

Пусть $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$. Очевидно, что если $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, то $\rho\to 0$, и наоборот, если $\rho\to 0$, то $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, а следовательно, α и β стремятся к нулю.

Тогда сумму $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ можно переписать в виде

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\left(\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\right)\cdot\rho=\varepsilon\cdot\rho=o(\rho),$$

так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)=0$.

С учетом этого условие дифференцируемости функции в точке $P_0(x_0;y_0)$ можно записать в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \qquad (2)$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Условия дифференцируемости (1) и (2) функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ эквивалентны.

В равенствах (1) и (2) слагаемое $A\Delta x+B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется ***главной частью приращения функции***, так как оставшееся слагаемое $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности). *Если функция* $z=f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$, *то она и непрерывна в этой точке.*

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция* $z=f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$, *то она имеет в этой точке частные производные* $f'_x(x_0,y_0)$ *и* $f'_y(x_0,y_0)$, *причем* $f'_x(x_0,y_0)=A$, $f'_y(x_0,y_0)=B$.

Замечание. Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны, т.е. из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция* $z=f(x,y)$ *имеет частные производные в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$, *непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются ***непрерывно дифференцируемыми***.

Полный дифференциал функции нескольких переменных и его геометрический смысл. Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то главная линейная относительно приращения аргументов часть ее полного приращения называется ***полным дифференциалом*** функции.

Обозначается:

$$dz\big|_{P(x_0;y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

или

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются ***дифференциалами независимых переменных*** x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами*** функции $z = f(x;y)$.

Обозначаются: $d_x z$ и $d_y z$.

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z .$$

Геометрический смысл дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0,y_0)$.

Поэтому полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ представляет собой отрезок AB (рис.4).

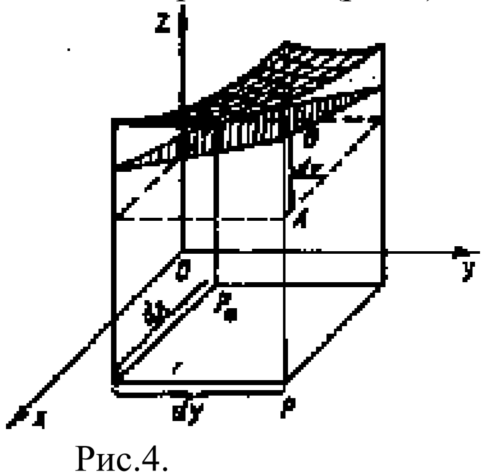

Рис.4.

Замечание. Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Дайте определение частных производных.
3. В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
5. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
6. Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции $z = f(x, y)$?
7. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
8. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
9. Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит его геометрический смысл?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x,$$

$$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Аналогично

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2,$$

$$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84.$$

Тогда

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

2. Найти частные производные функций

1) $z = x^2 + \sin(x + y^2)$, 2) $u = xy + \ln(x - y - z)$,

3) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение.

1. Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos\left(x + y^2\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x + y^2\right).$$

2. Частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z}.$$

3. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1} \text{ или } \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{1}.$$

4. Доказать, что функция $z = xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=$$
$$=y^2\Delta x+2xy\Delta y+\left(2xy\Delta y+\Delta y^2\right)\Delta x+x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2=A$, $2xy=B$, $2xy\Delta y+\Delta y^2=\alpha$, $x\Delta y=\beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

5. Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

6. Найти полный дифференциал функции

$$f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$$
$$=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz=$$
$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)dz-z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, где $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$.

Имеем

$$f(4,3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$
$$\Delta f\approx df=\frac{x\,\Delta x+y\,\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\Delta f(4,3)\approx\frac{4\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07}{5}\approx 0{,}08.$$

Тогда

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\approx 5+0{,}08=5{,}08.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = x^2 + y^3 - 3x^2y + 4x + 5y - 7$, 2) $z = y\sin(3x - 4y)$,

3) $z = 3^{x^2y^4}$, 4) $z = \dfrac{3x - y^5}{x^2 + 4y^3}$,

5) $z = \arccos\dfrac{x}{y}$, 6) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x - y}$.

2. Вычислить значения частных производных в указанной точке:

1) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $M_0(3,2)$; 2) $u = \dfrac{y - z}{z - x}$, $M_0(2,1,3)$.

3. Найти полный дифференциал следующих функций:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$, 2) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

4. Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1{,}1;0{,}8)$.

5. Показать, что функция $z = y\sin\left(y e^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. Вычислить приближенно выражение, заменив приращение функции дифференциалом:

1) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$, **2)** $1{,}98^{2{,}02}$.

7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 = y^2$ в точке $M(1,1,3)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = 4x^2 - 2y^3 - 3xy^3 - 3xy + 5y + 8$, 2) $z = x^2\cos(x + 6y)$,

3) $z = 5^{x^2y + xy^4}$, 4) $z = \dfrac{4x^3 + 3y^5}{2x^2 - 5y^6}$,

5) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, 6) $z = \sqrt{y}\, e^{-2x}$.

2. Вычислить значения частных производных в указанной точке:

1) $z = \dfrac{xy}{x + y}$, $M_0(4,-5)$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,-2,2)$.

3. Найти полный дифференциал следующих функций:

1) $u = z^{y^x}$, 2) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = x^2 - xy + y^2$ при переходе от точки $M_0(2;1)$ к точке $M(2{,}1;0{,}9)$.

5. Показать, что функция $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

6. Вычислить приближенно выражение, заменив приращение функции дифференциалом:

1) $\sqrt{(1{,}03)^2+(2{,}98)^2}$, 2) $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$.

7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(1{,}0{,}0)$.

Практическое занятие 3
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

1. Дифференцирование сложной функции.
2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением.
3. Системы неявных и параметрически заданных функций.

Пусть $z = f(u;v)$ – функция двух переменных u и v, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y, т.е. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные переменные.

Теорема 1. *Если функция $z = f(u;v)$ дифференцируема в точке $M(u;v)$, а функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы в точке $P(x;y)$, то сложная функция $z = F(x;y)$, где $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$, дифференцируема в точке $P(x;y)$, причем ее частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Для функции трех переменных $w = f(u,v,t)$, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x, y, z т.е. $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $t = t(x,y,z)$ и $w = f(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)) = F(x,y,z)$ частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Аналогично для функции n, $n > 3$, переменных.

Частные случаи задания сложной функции $w = f(u,v,t)$.

1. Пусть $w = f(u,v,t)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $t = t(x,y)$.

Тогда $w = f(u(x,y), v(x,y), t(x,y)) = F(x,y)$, является сложной функцией только двух аргументов, и, значит, имеем две частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

2. Пусть $z = f(x,y,u)$, $y = y(x)$, $u = u(x)$.

Тогда $z = f(x, y(x), u(x)) = F(x)$ – функция одной переменной x. Найдем z'_x по общей формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y = y(x)$ и $u = u(x)$ – функции только одной переменной x, то их частные производные обращаются в обыкновенные производные. Кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=f(x,y(x),u(x))$ называется ***полной производной***.

Между частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\frac{dz}{dx}$ производными имеется существенное различие. Полная производная $\frac{dz}{dx}$ – это обыкновенная производная от z как функции x, а $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по переменной x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными).

Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Функция $y=f(x)$ может быть задана неявно уравнением, связывающим переменные x и y:

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

Возникает вопрос, при каких условиях уравнение $F(x,y)=0$ определяет одну из переменных как функцию другой.

Теорема 1 (существование неявной функции). *Пусть функция* $F(x,y)=0$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует точка $P_0(x_0;y_0)$*, в которой* $F(x_0,y_0)=0$*;*

2) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$*;*

3) функции $F'_x(x,y)$ *и* $F'_y(x,y)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$.

Тогда существует единственная функция $y=f(x)$ *определенная на некотором интервале, содержащем точку* x_0*, и удовлетворяющая при любом* x *из этого интервала уравнению* $F(x,y)=0$*, такая, что* $f(x_0)=y_0$.

Замечание. Условие $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, является достаточным, но не необходимым условием существования в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$ единственной неявной функции $y=f(x)$, определяемой уравнением (1).

Неявная функция двух независимых переменных определяется уравнением $F(x,y,z)=0$, связывающим три переменные. Справедлива теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема 2. *Пусть функция* $F(x,y,z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists P(x_0;y_0;z_0): F(x_0,y_0,z_0)=0$*;*

2) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$*;*

3) $F'_x(x,y,z)$*,* $F'_y(x,y,z)$ *и* $F'_z(x,y,z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Тогда существует единственная функция $z=f(x,y)$ *определенная в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$*, удовлетворяющая уравнению* $F(x,y,z)=0$ $\forall\, x,y\in U(\delta,P_0)$*, такая, что* $f(x_0,y_0)=z_0$.

Замечание. Пусть условия 1–3 теоремы 1 выполнены и уравнение (1) определяет y как некоторую функцию от x. Если в это уравнение подставить вместо y функцию $f(x)$, то получим тождество

$$F(x, f(x)) = 0 .$$

Продифференцируем данную функцию по правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 .$$

Тогда $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Теорема 3. *Пусть 1) функция* $F(x,y)=0$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$*; 2) частная производная* $F'_y(x,y)$ *непрерывна в точке* $P_0(x_0;y_0)$*; 3)* $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. *Тогда существует такой прямоугольник*

$$\Pi_{(P_0;d_1;d_2)} = \{(x;y) \,|\, |x-x_0| < d_1, |y-y_0| < d_2 \} \subset \delta ,$$

в котором уравнение $F(x,y)=0$ *определяет единственную неявную функцию вида* $y=f(x)$*, причем* $f(x_0)=y_0$. *Функция* $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(x_0-d_1;x_0+d_1)$*, и ее производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}\right|_{y=f(x)} = -\frac{F'_x(x;f(x))}{F'_y(x;f(x))} . \qquad (2)$$

Замечания. 1. В формуле важен порядок действий при вычислении $F_x(x;f(x))$: сначала берется частная производная по x функции $F(x;y)$, а затем вместо y подставляется $f(x)$, но не наоборот.

2. Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет z как некоторую функцию $z=f(x,y)$ независимых переменных x и y. Если в это уравнение вместо z подставить $f(x,y)$ получается тождество $F(x,y,f(x))=0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} .$$

3. Если уравнение поверхности Q задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то:

$$z'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}, \quad z'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} .$$

Следовательно, уравнение ***касательной*** плоскости α к поверхности имеет вид
$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ и каноническое уравнение ***нормали***:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} .$$

Неявные функции, определяемые системой уравнений. Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, …, y_m есть

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases} \qquad (4)$$

и называется ***совокупностью неявных функций***, определяемых системой уравнений (3).

Определитель

$$J = \frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

составленный из частных производных, называется ***определителем Якоби (якобианом)*** функций F_1, F_2, …, F_m по переменным y_1, y_2, …, y_m.

Теорема 5. *Пусть 1) функции* F_1, F_2, …, F_m *дифференцируемы в некоторой* δ*-окрестности точки*

$$P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0),$$

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,...,m$ *непрерывны в* P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, …, $F_m(P_0)=0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$.

Тогда существует такой параллелепипед

$$\Pi = \left\{ (x_1;x_2;...;x_n;y_1;y_2;...;y_m) \left| \begin{matrix} \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i=1,2,...,n; \\ \left|y_j - y_j^0\right| < c_j,\ j=1,2,...,m \end{matrix} \right. \right\} \subset \delta,$$

в котором система уравнений (3) определяет единственную совокупность неявных функций вида (4), и эти функции дифференцируемы при $\left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i=1,2,...,n$.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, …, $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 5, якобиан отличен от нуля).

Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций. Пусть n функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1; x_2; ...; x_n), \\ y_2 = f_2(x_1; x_2; ...; x_n), \\ ...., \\ y_m = f_m(x_1; x_2; ...; x_n) \end{cases} \qquad (6)$$

определены и дифференцируемы в некоторой области $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $m \le n$.

Функция $y_k = f_k(x_1; x_2; ...; x_n) = f_k(P)$ называется ***зависимой*** в области D от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ... y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m), \qquad (7)$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Функции, заданные системой (6), называются ***зависимыми*** в области D, если одна из них (любая) зависит в области D от остальных функций. Если ни одна из функций (6) не зависит от остальных, то функции (6) называются ***независимыми*** в D.

Теорема 6 (достаточное условие независимости). *Пусть: 1) функции (6) дифференцируемы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, 2) якобиан этих функций по каким либо переменным не равен нулю в точке P_0. Тогда эти функции независимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.*

Следствие. *Если функции (6) зависимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, то все якобианы $\dfrac{D(y_1; y_2; ...; y_m)}{D(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n})}$ равны нулю в δ-окрестности.*

Если функция $z = z(x, y)$ двух независимых переменных задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u; v), \; y = y(u; v), \; z = z(u; v)$$

и

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

в окрестности точки $P(x; y)$. Тогда дифференциал этой функции в окрестности точки $P(x; y)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

2. Какая функция называется неявной? Приведите примеры неявных функций.

2. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y)=0$,.

3. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

4. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y)=0$, $F(x_1;x_2;...;x_n)=0$.

5. Что называется якобианом функций? Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

6. Дайте определение функции, зависимой от других функций в некоторой области.

7. Дайте определение зависимости и независимости функций. Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(u,v)=u\cdot\ln v$, где $u=3x-y$; $v=x^2+y^2$.

Решение. Имеем $u'_x=3$, $v'_x=2x$, $u'_y=-1$, $v'_y=2y$, $f'_u=\ln v$, $f'_v=\dfrac{u}{v}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3\ln v+2x\frac{u}{v}=3\ln\left(x^2+y^2\right)+2x\frac{3x-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\ln v+2y\frac{u}{v}=-\ln\left(x^2+y^2\right)+2y\frac{3x-y}{x^2+y^2}.$$

2. Найти полную производную сложной функции $z=x\sin v\cos w$, где $v=\ln\left(x^2+1\right)$; $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. По формуле имеем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Имеем:

1) $F(1,1)=0$;

2) $F(1,1)=0$; $F'_y(1,1)=\left.\left(3y^2+2x\right)\right|_{(1;1)}=5\neq 0$;

3) частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $P(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^3+2xy+x^4-4=0$ и условию

$$f(1)=1.$$

4. Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Решение. Обозначим через $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Имеем $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$.

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

5. Найти частные производные неявной функции $e^{-xy}-2z+e^z=0$.

Решение. Имеем $F'_x=-ye^{-xy}$, $F'_y=-xe^{-xy}$, $F'_z=-2+e^z$.

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}$.

6. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0;1;1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $\quad F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $\quad F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $\quad F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или $2y+3z-5=0$.

Уравнение нормали $\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ или $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=u+v-x, \\ F_1(x,y,u,v)=u-yv. \end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$J=\frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix}=-y-1,$$

при этом $J\neq 0$ при $y\neq -1$.

Дифференцированием находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных

$$\begin{cases} du+dv=dx, \\ u-ydv-vdy=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y\neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},$$
$$dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем

$$d^2u=\frac{(dydx+dvdy)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{\left(dydx+\frac{dx-vdy}{1+y}dy\right)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{(1+y)dxdy+dxdy-vdy^2-ydxdy-vdy^2}{(1+y)^2}=\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v=\frac{-dvdy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{dx-vdy}{1+y}dy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=\frac{-dxdy+vdy^2-dxdy+vdy^2}{(1+y)^2}= \quad =-\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2}=-d^2u.$$

8. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=cv.$$

Решение. Имеем

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\neq 0$$

при $u\neq 0$.

Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv,\ y=\sin v\,du+u\cos v\,dv,\ z=c\,dv.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv=\frac{\cos v\,dy-\sin v\,dx}{u}.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{c}{u}(\cos v\,dy-\sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u}\ \text{ и }\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}.$$

9. Доказать, что функции $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J=\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_2.$$

В точке $O(0;0)$ якобиан равен нулю $\left.\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}\right|_{(0;0)}=0$. Для любой точки $P(x_1;x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, из окрестности точки $O(0;0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}\right|_{P(x_1;x_2)} \neq 0$. Согласно теореме 6, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $O(0;0)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

1) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

2) $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ если $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, где $y=e^x$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ если $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

4. Дана дифференцируемая функция $=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

представить в полярных координатах.

5. Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

6. Найти производные неявной функции в указанной точке:

1) $x^2+y^2-2xy+4x-6y-3=0$, $M(-1;1)$;

2) $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, $M(3;1)$.

7. Записать уравнение касательной и нормали в указанной точке:

1) $xy-4x+6y-14=0$, $M(-1;2)$;

2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$, $M(1;0)$.

8. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases}7x^2+y^2-3z^2+1=0,\\ 4x^2+2y^2-3z^2=0.\end{cases}$$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$$

10. Найти dz, если $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если

1) $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, где $v=\operatorname{ctg}^2 x$, $u=\operatorname{tg}^2 x$;

2) $z=x^y$, $x=\ln t$, $y=\sin t$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ если $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, где $y=4x+1$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ если

1) $z=u^2+v^2$, где $u=x+y$, $v=x-y$;

2) $z=u^2\ln v$, где $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

4. Дана дифференцируемая функция $=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

представить в полярных координатах.

5. Найти dz, если $z=\frac{u}{v}$, где $u=x^2+y$, $v=xy$.

6. Найти производные неявной функции в указанной точке:

1) $x^2+y^2-xy-1=0$, $M(1;1)$;

2) $x^3+y^3-x^2-y^2=0$, $M(2;1)$.

7. Записать уравнение касательной и нормали в указанной точке:

1) $x^2-y^2+2x-4y-6=0$, $M(1;-1)$;

2) $e^y-x+y+3=0$, $M(4;0)$.

8. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 3z^2=0, \\ x^2+2y^2+3z^2-1=0. \end{cases}$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=a\cos u\,\mathrm{ch}\,v,\quad y=b\sin u\,\mathrm{ch}\,v,\quad z=c\,\mathrm{sh}\,v.$$

10. Найти dz, если $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$.

Практическое задание 4
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1.Частные производные высших порядков.
2.Теорема о равенстве смешанных производных.
3.Дифференциалы высших порядков.
4. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $P(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$.

Обозначаются:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, z''_{xx} – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy} – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx} – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, z''_{yy} – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***частной производной n-го порядка*** и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Среди частных производных второго порядка функции $z=f(x,y)$ имеются две смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Возникает вопрос: зависит ли результат дифференцирования функций нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным.

Теорема 1. Если функция $z=f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $P_0(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Замечание. Все приведенные выше рассуждения, а также теорема 1 имеют место и для функции любого числа переменных.

Дифференциалы высших порядков. Пусть $z=f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Придавая x и y приращения $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, в любой точке $P(x;y)\in D(f)$ можно вычислить полный дифференциал

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy,$$

который называют ***дифференциалом первого порядка*** функции $z=f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x;y)\in D(f)$ если он существует, называется ***дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2z=d(dz).$$

Найдем аналитическое выражение для d^2z, считая dx и dy постоянными:

$$d^2z=d\left(f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy\right)=d\left(f'_x(x,y)\right)dx+d\left(f'_y(x,y)\right)dy=$$
$$=\left(f''_{xx}(x,y)dx+f''_{yx}(x,y)dy\right)dx+\left(f''_{yx}(x,y)dx+f''_{yy}(x,y)dy\right)dy=$$
$$=f''_{xx}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для ***дифференциала третьего порядка*** d^3z**:**

$$d^3z=d\left(d^2z\right)=$$
$$=f'''_{xxx}(x,y)dx^3+3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy+3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2+3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k ***раз непрерывно дифференцируемой*** в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Обозначается: $f\in \mathrm{C}_G^k$.

Замечания. 1. Аналитические выражения для dz, d^2z и d^3z кратко записывают в виде следующих символических формул:

$$dz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z\ ,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

2. Если $z=f(x,y)$ – дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx\neq\Delta x$, $dy\neq\Delta y$. Следовательно, можно получить новые выражения для $d^2z=d(dz)$, $d^3z=d\left(d^2z\right)$, …. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Формула Тейлора для функции двух переменных.

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть функция двух переменных $z=f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0;y_0)\in D(f)$. Тогда справедлива формула Тейлора для функции двух переменных*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n\,,$$

где $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$, $x_0<\xi<x$; $y_0<\eta<y$.

Следствие. *При условиях теоремы 1 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+o\left(\rho^n\right).$$

Если в формуле Тейлора положить $x_0=y_0=0$, получается ***формула Маклорена*** для функции двух переменных $z=f(x,y)$:

$$f(x,y)=f(0{,}0)+df(0{,}0)+\frac{1}{2!}d^2f(0{,}0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(0{,}0)+R_n\,.$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как находятся частные производные высших порядков?
2. Что называется смешанной производной?
3. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
4. Сформулируйте теорему Тейлора для функции двух переменных.
5. Какой вид имеет формула Маклорена для функции двух переменных?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти частные производные второго порядка функции

$$z=\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos\left(x^2+y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4^2x\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right).$$

2. Найти частные производные второго порядка функции

$$u=xyz-e^{x+y}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz-e^{x+y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=xz-e^{x+y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3. Найти dz и d^2z, если $z=\ln(x-y)+\sqrt{xy}$.

Решение. Используем формулу $dz=z'_x dx+z'_y dy$. Так как

$$z'_x=\frac{1}{x-y}+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y=\frac{-1}{x-y}+\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y},$$

то

$$dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Для определения d^2z вычислим предварительно частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$d^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy-$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

3. Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=2^{xy}$.

Решение. Для любых x, $y\in U(\varepsilon;P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

или в краткой записи

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+o(\rho^2).$$

Вычислим:

$f(P_0)=2$,

$df(P_0)=\left(f'_x(P_0)dx+f'_y(P_0)dy\right)=$

$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(x-1)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-1)\right)\Big|_{P_0}==2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)$,

$d^2f(P_0)=f''_{xx}(P_0)dx^2+2f''_{xy}(P_0)dxdy+f''_{yy}(P_0)dy^2=$

$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$

$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\Big|_{P_0}=$

$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2$.

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z=xy+\frac{x}{y}$, 2) $z=xe^{-xy}$,

3) $z=y^x$, 4) $z=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

5) $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=x^3y+xy^2-2x+3y-1$ в точке $M(3;2)$.

3. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\cos\frac{y}{x}\arccos\frac{x}{y}$.

4. Найти дифференциал второго порядка от указанной функции:
1) $z=x^3y^3$, 2) $z=e^{xy}$.

5. Найти дифференциал третьего порядка функции

$$z = x^4 - y^4 + x^2 y^2 .$$

6. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4 .$$

7. Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

8. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z = x^5 + y^5 - 5x^3 y^3$, 2) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

3) $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$, 4) $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^3 y^2 - xy + 4x - 2y - 5$ в точке $M(1;-1)$.

3. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x \sin(2x + 3y)$.

4. Найти дифференциал второго порядка от указанной функции:

1) $z = \dfrac{x}{x + y}$, 2) $z = \ln xy$.

5. Найти дифференциал третьего порядка функции

$$z = x^3 y - xy^3 .$$

6. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy .$$

7. Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x, y) = e^y \cos x$.

8. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$.

Практическое занятие 5
ЭКСРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие экстремума функции многих переменных.
2. Необходимые и достаточные условия экстремума.
3. Достаточные условия экстремума.

Понятие экстремума функции многих переменных. Пусть дана функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $u = f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P)$$
$$(f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

Обозначается:

$$\max_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)$$
$$(\min_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют ***точками экстремума*** функции, а максимумы и минимумы функции – ***экстремумами функции***.

Замечание. Если функция $u = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то:
в случае локального максимума – $f(P) - f(P_0) = \Delta u < 0$,
в случае локального минимума – $f(P) - f(P_0) = \Delta u > 0$.

Из сказанного выше следует, что полное приращение функции не меняет знака в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$. Однако для всех точек $P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ определить знак приращения Δu практически невозможно, поэтому надо искать другие условия, по которым можно судить о наличии и характере экстремума функции в данной точке.

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума). *Если в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ дифференцируемая функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:*

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0, \qquad (1)$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. *Если функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует*.

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, в которой выполняется условие (1), называется ***точкой***

возможного экстремума или ***стационарной (критической).***

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Некоторые сведения о квадратичных формах. Функция вида

$$Q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется ***квадратичной формой*** от переменных x_1, x_2, $...,x_n$, числа a_{ij}, $i, j = 1,2,..., n$, называются ***коэффициентами квадратичной формы***, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется ***симметричной***.

Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются ***главными*** минорами матрицы A.

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любых значений переменных x_1, x_2, $...,x_n$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***знакоопределенной***, если она является положительно определенной или отрицательно определенной. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***квазизнакоопределенной***, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значении, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***знакопеременной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра).

1) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots .$$

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума). *Пусть функция $u = f(x_1;x_2;...;x_n) = f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 – точка возможного экстремума, т.е. $du(P_0)=0$. Тогда 1) если второй дифференциал $d^2u(P_0)$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n, то функция $u = f(P)$ имеет в точке P_0 локальный минимум (максимум); 2) если $d^2u(P_0)$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ в точке P_0 экстремума не имеет.*

Замечание. Если $du(P_0)=0$, а $d^2u(P_0)$ является квазиопределенной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных). *Пусть $P_0(x_0;y_0)$ – стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta;P_0)$ функции $z = f(x;y)$. И пусть*

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (2)$$

Тогда стационарная точка $P_0(x_0;y_0)$ является: 1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$; 2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$; 3) если $\Delta(P_0)<0$, то в стационарной точке P_0 локального экстремума нет, 4) $\Delta(P_0)=0$, то локальный экстремум в стационарной точке P_0 может быть, а может и не быть.

Замечания. 1. Если $\Delta(P_0)=0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке P_0. В этом случае необходимо произвести дополнительные исследования знака функции $z = f(x,y)$ в $U(\delta;P_0)$. Действительно, если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = C = 0$, то $d^2z = 0$ и $\Delta z \approx \frac{1}{3!} d^3z\big|_{P_0}$, т.е. в этом случае знак Δz определяется знаком $d^3z\big|_{P_0}$. Следовательно, требуются дополнительные исследования по определению знака Δz в окрестности стационарной точки P_0.

2. При выводе достаточных условий экстремума предполагалось, что $\Delta y \neq 0$. Если $\Delta y = 0$ для любого $\Delta x \neq 0$, то получаем экстремум функции одной переменной $z = f(x,y)$. Аналогично если $\Delta x = 0$ для любого $\Delta y \neq 0$, то $z = f(x_0,y)$.

Приращения Δx и Δy не могут равняться нулю одновременно, поскольку в подобном случае точка $P(x+\Delta x; y+\Delta y)$ совпала бы с точкой $P_0(x_0;y_0)$ и функция $z = f(x,y)$ не получила бы никакого приращения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение локального экстремума функции.

2. Сформулируйте теорему о необходимом условии локального экстремума .

3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?

4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

5. Какая квадратичная форма называется 1) положительно определенной, 2) отрицательно определенной, 3) знакоопределенной, 4) квазизнакоопределенной, 5) знакопеременной?

6. Сформулируйте критерий Сильвестра.

7. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных $z = f(x;y)$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Решение. 1. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 2\right),\ z'_y = 2ye^{\frac{x}{2}}.$$

2. Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = -2$, $y_0 = 0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

3. Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(-2;0)$. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min} = z(-2,0) = -\frac{2}{e}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}\left(x + y^2\right)$.

Решение. 1. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

2. Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 - x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$.

Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

3. Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то в точке $P_0(1;0)$ нет экстремума, т.е. в окрестности $U(\delta;P_0)$ исследуемая функция меняет знак.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. 1. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

2. Решая систему уравнений $\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\}$ находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

3. Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(0;0)$. Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

В данном случае стационарная точка $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума, поскольку $\Delta z > 0 \quad \forall P \in \dot{U}(\delta;P_0)$; $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти экстремумы функций двух переменных:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - x - 6y$, 2) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,

3) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$, 4) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$,

5) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(3x^2 + y^2\right)$.

2. Найти экстремум функций трех переменных:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 6z + 40$,

2) $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3. Найти экстремум функции, заданной неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти экстремумы функций двух переменных:

1) $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$, 2) $z = xy^2(1 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$,

3) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$, 4) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$,

5) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(x^2 + 2y^2\right)$.

2. Найти экстремум функций трех переменных:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$,

2) $u = (x + y + z)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$.

3. Найти экстремум функции, заданной неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

Практическое занятие 6
УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Понятие условного экстремума.
2. Методы отыскания условного экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ при условии, что ее аргументы являются связанными между собой соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ ....\ ....\ ...., \\ F_k(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которые называются ***уравнениями связи.*** И пусть координаты точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ ***условный минимум (максимум)*** при условиях связи (1), если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \delta$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0)\ \ (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

Существуют следующие методы отыскания условного экстремума.

Метод исключения части переменных. Рассмотрим задачу отыскания условного экстремума применительно к функции двух переменных. Пусть требуется найти локальный экстремум функции $z = f(x; y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т.е. выразить y как функцию x: $y = y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$ вместо y функцию $y(x)$, получим функцию одной переменной $z = f(x, y(x))$. Вычислив значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, найдем искомые точки условного экстремума. Тот же самый результат получится, если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т.е. x выразить как функцию y.

Если условие связи (линии Г) задается параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной. Однако если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных и представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z=f(x;y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно x или y. Для этого используем ***метод множителей Лагранжа***.

Введем вспомогательную функцию, называемую ***функцией Лагранжа***:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где $f(x;y)$ – заданная функция; $\varphi(x;y)$ – левая часть уравнения связи.

Теорема 1. *Пусть 1) функция $z=f(x;y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 1 (лекция 10)*

Тогда существует такое число λ, что

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

Правило нахождения точек условного экстремума. Для того чтобы определить точки условного экстремума функции $z=f(x;y)$, удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x,y)=0$, необходимо:

1) составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

2) вычислить частные производные функции Лагранжа по переменным x, y, λ;

3) приравняв нулю найденные производные, составить систему уравнений (4); решив ее, можно определить координаты критических точек P возможного условного экстремума;

4) определить знак приращения Δz в окрестностях критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y)=0$, т.е. лежат на линии L.

Если $(\forall P\in L)\cap(P\in U(\delta;P_0))$ выполняется условие

$$\Delta z=f(P)-f(P_0)>0,$$

то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного минимума.

Если $(\forall P\in L)\cap(P\in U(\delta;P_0))$ выполняется условие

$$\Delta z=f(P)-f(P_0)<0,$$

то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного максимума.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается также на основании знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2,$$

при условии, что dx и dy связаны соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0,\quad dx^2+dy^2\neq 0.$$

Функция $z=f(x;y)$ имеет условный максимум, если $d^2L<0$, и условный минимум, если $d^2L>0$.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда в области D она достигает своих наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области D, либо на ее границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области, называются ***точками абсолютного*** или ***глобального экстремума***. Если наибольшее или наименьшее значения достигаются во внутренних точках области, то это – точки локального экстремума функции $z = f(x; y)$.Таким образом, точки, в которых функция z принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области.

Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D необходимо:

– вычислить значения функции в точках возможного экстремума, принадлежащих области D,

– найти наибольшее и наименьшее значения на ее границе,

– сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Предположим, что граница области D задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на границе области D сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений (абсолютного экстремума) функции одной переменной, так как уравнение границы области D связывает переменные x и y между собой. Значит, если разрешить это уравнение относительно одной из переменных или представить его в параметрическом виде и подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в уравнение $z = f(x, y)$, то придем к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной. Если же уравнение $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y, а также невозможно представить его параметрическими уравнениями, то задача сводится к отысканию условного экстремума.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определение условного экстремума функции.
2. Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных.
3. Что такое функция Лагранжа? Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.
4. Объясните, как исследовать точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа.
5. Как найти глобальные экстремумы функции двух переменных?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что точки $(x; y)$ лежат на прямой l, уравнение которой $x+y-1=0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x=2x+\lambda,\ L'_y=2y+\lambda,\ L'_\lambda=x+y-1.$$

Составляем и решаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $\lambda=-1$.

Таким образом, мы нашли единственную критическую точку $P_0(0{,}5;0{,}5)\in l$. Для любой точки $P\in l$ выполняется условие $f(P_0)>f(P)$. Следовательно, точка $P_0(0{,}5;0{,}5)$ является точкой условного минимума.

2. Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$, при условии что x и y удовлетворяют условию $x^2+y^2=25$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z плоскости $z=9-8x-6y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2+y^2=25$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;\lambda)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25).$$

Находим е частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-8+2\lambda x,\ \frac{\partial L}{\partial y}=-6+2\lambda y,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25.$$

Составляем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} -8+2\lambda x=0, \\ -6+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-25=0. \end{array}\right\}.$$

Решая данную систему, получим

$$x_1=4,\ y_1=3,\ \lambda_1=1;$$

$$x_2=-4,\ y_2=-3,\ \lambda_2=-1.$$

Частные производные второго порядка имеют вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda.$$

Тогда выражение для второго дифференциала есть

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Поскольку $d^2L>0$ при $x_1=4$, $y_1=3$, $\lambda_1=1$, то функция $z=9-8x-6y$ в этой точке имеет условный минимум. Если $x_2=-4$, $y_2=-3$, $\lambda_2=-1$, то $d^2L<0$. Поэтому в данном случае функция $z=9-8x-6y$ имеет условный максимум.

Следовательно,

$$z_{\max}=z(-4;-3)=59,$$

$$z_{\min} = z(4;3) = -41.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области D, ограниченной осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рис.2).

Решение. Определим критические точки, лежащие внутри области D (на рис.1. она заштрихована). Для этого вычислим частные производные: $z'_x = 6x^2 - 6y$, $z'_y = -6x + 6y$. Приравняв их нулю, составим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0. \end{aligned}\right\}$$

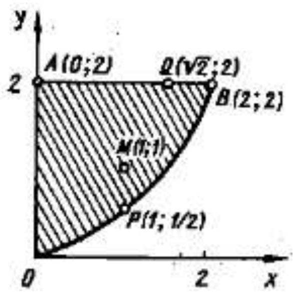

Рис.1.

Решив ее, найдем две критические точки: $O(0;0)$ и $M(1;1)$, в которых обе частные производные равны нулю. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области D. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то этой точкой может быть только $M(1;1)$.

Исследуем функцию на границе области. На отрезке OA $x = 0$ и, следовательно, $z = 3y^2$ ($0 \leq y \leq 2$). Функция $z = 3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA.

На отрезке AB $y = 2$, и поэтому здесь функция $z = 2x^2 - 12x + 12$ ($0 \leq x \leq 2$) представляет собой функцию одной переменной x. Ее глобальные экстремумы находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Находим частную производную $z'_x = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $z'_x = 0$ (или $6x^2 - 12 = 0$), откуда $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$, на отрезке AB ей соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$.

Итак, глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем

$$z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \text{ при } 0 \leq x \leq 2.$$

Решая уравнение

$$z'_x = 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0,$$

находим критические точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т.е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\quad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\quad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_{D} z=z(A)=12$, $\min\limits_{D} z=z(M)=-1$.

Таким образом, точка A является точкой глобального максимума, а точка M – точкой глобального минимума данной функции в рассматриваемой замкнутой области D.

4. Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой поверхностью найти тот, который имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину, и высоту параллелепипеда через x, y, z. И пусть V – объем параллелепипеда. Тогда

$$V=xyz,\ S=2xy+2yz+2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z)=xyz$ при условии $2xy+2yz+2xz=S$.

Составим функцию Лагранжа

$$\varphi(x;y;z;\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yz+\lambda(2y+2z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xz+\lambda(2x+2z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+\lambda(2x+2y).$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy+2yz+2xz=S \\ yz+\lambda(2y+2z)=0, \\ xz+\lambda(2x+2z)=0, \\ xy+\lambda(2x+2y)=0, \end{cases}$$

получаем $x=y=z=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{6}}$.

При найденных x, y, z объм будет наибольшим. Следовательно, прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем, является кубом.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти условные экстремумы функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$,

2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$,

3) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$,

4) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях

1) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$,

2) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$,

3) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

3. Найти прямоугольный параллелепипед с диной диагонали d, имеющей наибольший объем.

4. Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от Верин была бы наименьшей.

5. В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти условные экстремумы функций:

1) $z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$,

2) $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y = 6$,

3) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 4$,

4) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях

1) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$,

2) $z = x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 9$,

3) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

3. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

4. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

Идз-1
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

№1. Найти область определения указанных функций.

1.1. $z = 3xy/(2x-5y)$.
1.2. $z = \arcsin(x-y)$.
1.3. $z = \sqrt{y^2-x^2}$.
1.4. $z = \ln(4-x^2-y^2)$.
1.5. $z = 2/(6-x^2-y^2)$.
1.6. $z = \sqrt{x^2+y^2-5}$.
1.7. $z = \arccos(x+y)$
1.8. $z = 3x+y/(2-x+y)$.
1.9. $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$.
1.10. $z = \ln(x^2+y^2-3)$.
1.11. $z = \sqrt{2x^2-y^2}$.
1.12. $z = 4xy/(x-3y+1)$.
1.13. $z = \sqrt{xy}(x^2+y^2)$.
1.14. $z = \arcsin(x/y)$.
1.15. $z = \ln(y^2-x^2)$.
1.16. $z = x^3y/(3+x-y)$.
1.17. $z = \arccos(x+2y)$.
1.18. $z = \arcsin(2x-y)$.
1.19. $z = \ln(9-x^2-y^2)$.
1.20. $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$.
1.21. $z = 1/\sqrt{x^2+y^2-5}$.
1.22. $z = 4x+y/(2x-5y)$.
1.23. $z = \sqrt{3x-2y}/(x^2+y^2+4)$.
1.24. $z = 5/(4-x^2-y^2)$.
1.25. $z = \ln(2x-y)$.
1.26. $z = 7x^3y/(x-4y)$.
1.27. $z = \sqrt{1-x-y}$.
1.28. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
1.29. $z = 1/(x^2+y^2-6)$.
1.30. $z = 4xy/(x^2-y^2)$.

№2. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций.

2.1. $z = \ln(y^2-e^{-x})$.
2.2. $z = \arcsin\sqrt{xy}$.
2.3. $z = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$.
2.4. $z = \cos(x^3-2xy)$.
2.5. $z = \sin\sqrt{y/x^3}$.
2.6. $z = \mathrm{tg}(x^3+y^2)$.
2.7. $z = \mathrm{ctg}\sqrt{xy^3}$.
2.8. $z = e^{-x^2+y^2}$.
2.9. $z = \ln(3x^2-y^4)$.
2.10. $z = \arccos(y/x)$.
2.11. $z = \mathrm{arcctg}(xy^2)$.
2.12. $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$.
2.13. $z = \sin\sqrt{x-y^3}$.
2.14. $z = \mathrm{tg}(x^3y^4)$.
2.15. $z = \mathrm{ctg}(3x-2y)$.
2.16. $z = e^{2x^2-y^5}$.
2.17. $z = \ln(\sqrt{xy}-1)$.
2.18. $z = \arcsin(2x^3y)$.
2.19. $z = \mathrm{arctg}(x^2/y^3)$.
2.20. $z = \cos(x-\sqrt{xy^3})$.
2.21. $z = \sin\dfrac{x+y}{x-y}$.
2.22. $z = \mathrm{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$.
2.23. $z = \mathrm{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$.
2.24. $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
2.25. $z = \ln(3x^2-y^2)$.
2.26. $z = \arccos(x-y^2)$.
2.27. $z = \mathrm{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$.
2.28. $z = \cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

2.29. $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.

2.30. $z=e^{-(x^3+y^3)}$.

№3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.1. $f(x,y,z)=z/\sqrt{x^2+y^2}$. $M_0(0,-1,1)$.

3.2. $f(x,y,z)=\ln(x+\dfrac{y}{2z})$. $M_0(1,2,1)$.

3.3. $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$. $M_0(\dfrac{\pi}{6},1,2)$.

3.4. $f(x,y,z)=\ln(x^3+2y^3-z^3)$. $M_0(2,1,0)$.

3.5. $f(x,y,z)=x/\sqrt{y^2+z^2}$. $M_0(1,0,1)$.

3.6. $f(x,y,z)=\ln\cos(x^2y^2+z)$. $M_0(0,0,\dfrac{\pi}{4})$.

3.7. $f(x,y,z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$. $M_0(3,4,2)$.

3.8. $f(x,y,z)=arctg(xy^2+z)$. $M_0(2,1,0)$.

3.9. $f(x,y,z)=\arcsin(x^2/y-z)$. $M_0(2,5,0)$.

3.10. $f(x,y,z)=\sqrt{z}\sin(y/x)$. $M_0(2,0,4)$.

3.11. $f(x,y,z)=y/\sqrt{x^2+z^2}$. $M_0(-1,1,0)$.

3.12. $f(x,y,z)=arctg(xz/y^2)$. $M_0(2,1,1)$.

3.13. $f(x,y,z)=\ln\sin(x-2y+z/4)$. $M_0(1,1/2,\pi)$.

3.14. $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$. $M_0(1,1,2)$.

3.15. $f(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2-z^2}$. $M_0(1,2,2)$.

3.16. $f(x,y,z)=\ln(x+y^2)-\sqrt{x^2z^2}$. $M_0(5,2,3)$.

3.17. $f(x,y,z)=\sqrt{z}x^y$. $M_0(1,2,4)$.

3.18. $f(x,y,z)=-z/\sqrt{x^2+y^2}$. $M_0(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3.19. $f(x,y,z)=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z)$. $M_0(2,1,8)$.

3.20. $f(x,y,z)=z/(x^4+y^2)$. $M_0(2,3,25)$.

3.21. $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$. $M_0(3,2,1)$.

3.22. $f(x,y,z)=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z)$. $M_0(1,1,1)$.

3.23. $f(x,y,z)=-2x/\sqrt{y^2+z^2}$. $M_0(3,0,1)$.

3.24. $f(x,y,z)=ze^{-(x^2+y^2)/2}$. $M_0(0,0,1)$.

3.25. $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(x-y)}{z}$. $M_0(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3})$.

3.26. $f(x,y,z)=\sqrt{z}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. $M_0(4,1,4)$.

3.27. $f(x,y,z)=xz/(x-y).\ M_0(3,1,1).$

3.28. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}.\ M_0(3,4,\frac{\pi}{2}).$

3.29. $f(x,y,z)=ze^{-xy}.\ M_0(0,1,1).$

3.30. $f(x,y,z)=\arcsin(x\sqrt{y})-yz^2.\ M_0(0,4,1).$

№4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.1. $z=2x^3y-4xy^3$.

4.2. $z=x^2y\sin x-3y$.

4.3. $z=\operatorname{arctg} x+\sqrt{y}$.

4.4. $z=\arcsin(xy)-3xy^2$.

4.5. $z=5xy^4+2x^2y^7$.

4.6. $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$.

4.7. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.

4.8. $z=5xy^2-3x^3y^4$.

4.9. $z=\arcsin(x+y)$.

4.10. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

4.11. $z=7x^3y-\sqrt{xy}$.

4.12. $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$.

4.13. $z=e^{x+y-4}$.

4.14. $z=\cos(3x+y)-x^2$.

4.15. $z=\operatorname{tg}\frac{x+y}{x-y}$.

4.16. $z=\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$.

4.17. $z=xy^4-3x^2y+1$.

4.18. $z=\ln(x+xy-y^2)$.

4.19. $z=2x^2y^2+x^3-y^3$.

4.20. $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$.

4.21. $z=\arcsin\frac{x+y}{x}$.

4.22. $z=\operatorname{arcctg}(x-y)$.

4.23. $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$.

4.24. $z=y^2-3xy-x^4$.

4.25. $z=\arccos(x+y)$.

4.26. $z=\ln(y^2-x^2+3)$.

4.27. $z=2-x^3-y^3+5x$.

4.28. $z=7x-x^3y^2+y^4$.

4.29. $z=e^{y-x}$.

4.30. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$

№5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точность до двух знаков после запятой.

5.1. $u=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0.$

5.2. $u=\ln(e^x+e^{-y},\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1.$

5.3. $u=y^x,\ x=\ln(t-1),\ y=e^{t/2},\ t_0=2.$

5.4. $u=e^{y-2x+2},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi/2.$

5.5. $u=x^2e^y,\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t_0=\pi.$

5.6. $u=\ln(e^x+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=1.$

5.7. $u=x^y,\ x=e^t,\ y=\ln t,\ t_0=1.$

5.8. $u=e^{y-2x},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0.$

5.9. $u=x^2e^{-y},\ x=\sin t,\ y=\sin^2 t,\ t_0=\pi/2.$

5.10. $u=\ln(e^{-x}+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1.$

5.11. $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi/2$.

5.12. $u = \arcsin(x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.13. $u = \arccos(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.14. $u = x^2/(y+1)$, $x = 1-2t$, $y = \mathrm{arctg}\, t$, $t_0 = 0$.

5.15. $u = x/y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

5.16. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$.

5.17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

5.18. $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.19. $u = y^2/x$, $x = 1-2t$, $y = 1 + \mathrm{arctg}\, t$, $t_0 = 0$.

5.20. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

5.22. $u = \arcsin\frac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.23. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $x = \sin 2t$, $y = tg^2 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.24. $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

5.25. $u = y/x$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

5.26. $u = \arcsin(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.27. $u = \ln(e^{2x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^4$, $t_0 = 1$.

5.28. $u = \mathrm{arctg}(x+y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$.

5.29. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.

5.30. $u = \mathrm{arctg}(xy)$, $x = t + 3$, $y = e^t$, $t_0 = 0$.

№6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точность до двух знаков после запятой.

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2,1,1)$.

6.2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1,0,1)$.

6.3. $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2,1,-1)$.

6.4. $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1,1,0)$.

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1,1,-1)$.

6.6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0(1,1,1)$.

6.7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

6.8. $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.

6.9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1,2,1)$.

6.10. $xy = z^2 - 1,\ \ M_0(0,1,-1).$

6.11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2,\ \ M_0(1,1,1).$

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,\ \ M_0(0,2,1).$

6.13. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi/2,\ \ M_0(0,\pi/2,\pi).$

6.14. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4,\ \ M_0(2,1,2).$

6.15. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0,\ \ M_0(1,1,1).$

6.16. $x + y + z + 2 = xyz,\ \ M_0(2,-1,-1).$

6.17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2,\ \ M_0(0,1,-1).$

6.18. $e^z - xyz - x + 1 = 0,\ \ M_0(2,1,0).$

6.19. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,\ \ M_0(1,-1,2).$

6.20. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0,\ \ M_0(0,-2,2).$

6.21. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3,\ \ M_0(1,2,0).$

6.22. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0,\ \ M_0(1,-1,1).$

6.23. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0,\ \ M_0(0,1,-1).$

6.24. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3,\ \ M_0(4,3,1).$

6.25. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59,\ \ M_0(3,1,4).$

6.26. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17,\ \ M_0(-2,-1,2).$

6.27. $x^3 + 3xyz - z^3 = 27,\ \ M_0(3,1,3).$

6.28. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3,\ \ M_0(1,1,3).$

6.29. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0,\ \ M_0(2,1,1).$

6.30. $z^2 = xy - z + x^2 - 4,\ \ M_0(2,1,1).$

Идз-2
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

№1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к заданной поверхности Q в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

1.1. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, M_0(2,1,-1)$.
1.2. $x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy, M_0(-2,1,2)$.
1.3. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, M_0(1,2,1)$.
1.4. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, M_0(-1,1,2)$.
1.5. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, M_0(2,1,-1)$.
1.6. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, M_0(2,1,-1)$.
1.7. $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, M_0(1,2,-3)$.
1.8. $x^2 + y^2 - xz - yz = 0, M_0(0,2,2)$.
1.9. $x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, M_0(1,1,1)$.
1.10. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x = z, M_0(1,1,1)$.
1.11. $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y, M_0(-1,-1,-1)$.
1.12. $z = -x^2 + y^2 + 2xy - 3y, M_0(1,-1,1)$.
1.13. $z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y, M_0(-1,1,1)$.
1.14. $x^2 - 2y^2 + z + xz - 4y = 13, M_0(3,1,2)$.
1.15. $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9, M_0(1,-2,1)$.
1.16. $z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, M_0(2,1,0)$.
1.17. $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, M_0(1,2,1)$.
1.18. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, M_0(3,1,4)$.
1.19. $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, M_0(1,1,2)$.
1.20. $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, M_0(-2,1,0)$.
1.21. $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, M_0(1,4,-1)$.
1.22. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, M_0(0,2,0)$.
1.23. $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, M_0(-1,-1,1)$.
1.24. $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, M_0(1,0,1)$.
1.25. $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0, M_0(1,-1,1)$.
1.26. $x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8, M_0(1,1,0)$.
1.27. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10, M_0(-1,1,3)$.
1.28. $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15, M_0(-1,3,4)$.
1.29. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, M_0(-7,1,8)$.
1.30. $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, M_0(1,-1,2)$.

№2. Найти частные производные указанных функций. Убедится, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2.1. $z = e^{x^2 - y^2}$

2.2. $z = \mathrm{ctg}(x + y)$.

2.3. $z=\mathrm{tg}(x/y)$.

2.4. $z=\cos(xy^2)$.

2.5. $z=\sin(x^2-y)$.

2.6. $z=\mathrm{arctg}(x+y)$.

2.7. $z=\arcsin(x-y)$.

2.8. $z=\arccos(2x+y)$.

2.9. $z=\mathrm{arcctg}(x-3y)$.

2.10. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.

2.11. $z=e^{2x^2-y^2}$.

2.12. $z=\mathrm{ctg}(y/x)$.

2.13. $z=\mathrm{tg}\sqrt{xy}$.

2.14. $z=\cos(x^2y^2-5)$.

2.15. $z=\sin\sqrt{x^3y}$.

2.16. $z=\arcsin(x-2y)$.

2.17. $z=\arccos(4x-y)$.

2.18. $z=\mathrm{arctg}(5x+2y)$.

2.19. $z=\mathrm{arctg}(2x-y)$.

2.20. $z=\ln(4x^2-5y^3)$.

2.21. $z=e^{\sqrt{x-y}}$.

2.22. $z=\arcsin(4x+y)$.

2.23. $z=\arccos(x-5y)$.

2.24. $z=\sin\sqrt{xy}$.

2.25. $z=\cos(3x^2-y^3)$.

2.26. $z=\mathrm{arctg}(3x+2y)$.

2.27. $z=\ln(5x^2-3y^4)$.

2.28. $z=\mathrm{arcctg}(x-4y)$.

2.29. $z=\ln(3xy-4)$.

2.30. $z=\mathrm{tg}(xy^2)$.

№3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.1. $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, u=\frac{y}{x}$.

3.2. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3), u=\ln\frac{y}{x}+x^3-y^3$.

3.3. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, u=\ln(x^2+(y+1)^2)$.

3.4. $y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}, u=x^y$.

3.5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u, u=\frac{xy}{x+y}$.

3.6. $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, u=e^{xy}$.

3.7. $a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}, u=\sin^2(x-ay)$.

3.8. $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, u=\sqrt{\frac{y}{x}}$.

3.9. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3.10. $a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}, u=e^{-\cos(x+ay)}$.

3.11. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=(x-y)(y-z)(z-x)$.

3.12. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u, u=x\ln\frac{y}{x}$.

3.13. $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=\ln(x^2+y^2)$.

3.14. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0, u=\frac{y^3}{3x}+\arcsin(xy)$.

3.15. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy, u=0, u=e^{xy}$.

3.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0, u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3.17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$.

3.18. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0, u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

3.19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1, u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u, u=(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}$.

3.21. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$.

3.22. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=xe^{y/x}$.

3.23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=arctg\frac{y}{x}$.

3.24. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

3.25. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, u=\ln(x+e^{-y})$.

3.26. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=\arcsin\frac{x}{x+y}$.

3.27. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y}, u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$.

3.28. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}, u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

3.29. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}, u=\sqrt{2xy+y^2}$.

3.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\ln(x^2-y^2)$.

№4. Исследовать на экстремум следующие функции.

4.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

4.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

4.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

4.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

4.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

4.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

4.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$.

4.8. $z=x^2+y^2+xy+x-y+1$.

4.9. $z=4(x-y)-x^2-y^2.$

4.10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2.$

4.11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y.$

4.12. $z=(x-2)^2+2y^2-10.$

4.13. $z=(x-5)^2+y^2+1.$

4.14. $z=x^3+y^3-3xy.$

4.15. $z=2xy-2x^2-4y^2.$

4.16. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+18x+3.$

4.17. $z=2xy-5x^2-3y^2+2.$

4.18. $z=xy(12-x-y).$

4.19. $z=xy-x^2-y^2+9.$

4.20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10.$

4.21. $z=x^3+9y^3-6xy+1.$

4.22. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y.$

4.23. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20.$

4.24. $z=xy(6-x-y).$

4.25. $z=x^2+y^2-xy+x+y.$

4.26. $z=x^2+xy+y^2-2x-y.$

4.27. $z=(x-1)^2+2y^2.$

4.28. $z=xy-3x^2-2y^2.$

4.29. $z=x^2+3(y+2)^2.$

4.30. $z=2(x+y)-x^2-y^2.$

№5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x; y)$ в области $\overline{D}$, ограниченной указанными линиями.

5.1. $z = 3x + y - xy, \overline{D}: y = x, y = 4, x = 0.$
5.2. $z = xy - x - 2y, \overline{D}: x = 3, y = x, y = 0.$
5.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$
5.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$
5.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \overline{D}: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$
5.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$
5.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$
5.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$
5.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$
5.10. $z = x^2 + 2xy - 10, \overline{D}: y = 0, y = x^2 - 4.$
5.11. $z = xy - 2x - y, \overline{D}: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$
5.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \overline{D}: y = 8, y = 2x^2.$
5.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$
5.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \overline{D}: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0.$
5.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \overline{D}: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$
5.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \overline{D}: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0.$
5.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \overline{D}: x = 0, y = 2x, x = 0.$
5.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \overline{D}: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$
5.19. $z = xy - 3x - 2y, \overline{D}: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$
5.20. $z = x^2 + xy - 2, \overline{D}: y = 4x^2 - 4, y = 0.$
5.21. $z = x^2 y(4 - x - y), \overline{D}: x = 0, y = 0, y = 6 - x.$
5.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \overline{D}: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$
5.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \overline{D}: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$
5.24. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \overline{D}: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$
5.25. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \overline{D}: x = 3, y = 0, y = x + 1.$
5.26. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$
5.27. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \overline{D}: x = 2, y = x + 2, y = 0.$
5.28. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y = 6.$
5.29. $z = 4 - 2x^2 - y^2, \overline{D}: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$
5.30. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \overline{D}: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: / В.П. Демидович – М.: Наука, 1977. – 528 с.
2. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ [Текст]: учебное пособие / Э.И. Зверович– Мн.: БГУ, 2003.
3. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа [Текст]: учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.
4. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст]: учебн. пособие для вузов / Под ред. Бутузова В.Ф. – М.: Высш. шк., 1984. – 200с.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст]: / И.И. Привалов– М.: Наука, 1977.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст]: учеб. пособие. В 3 ч. – Под общей ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 352.
7. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа [Текст]: учеб. пособ. для вузов / А.М.Тер-Крикоров, М.И. Шабунин – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физического факультета

В семи частях

Часть пятая

Дифференциальное исчисление
функции нескольких переменных

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В.Н. Калугина

Лицензия №02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать __.__.__. Бумага писчая №1. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л. _____. Уч.изд.л. _____. Тираж ____экз. Заказ____.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия №2330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104